

Strukture GMDH u modeliranju i predikciji vremenskih serija

Ivan Ivezk

Group Method of Data Handling

- Ivakhnenko, 1966.
- regresija, estimacija, predikcija, kontrola...

Dobra svojstva:

- niskoparametarski algoritam
- samopodešavanje strukture
- selekcija ulaznih varijabli

Osnovni čvor

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_1 \quad \hat{y}_2 \quad \dots \quad \hat{y}_N]^T$$

$p(x_1, x_2) = a_5 x_1^2 + a_4 x_1 + a_3 x_2^2 + a_2 x_2 + a_1 x_1 x_2 + a_0$

$$\mathbf{x}_i = [x_{i1} \quad x_{i2} \quad \dots \quad x_{iN}]^T \quad \mathbf{x}_j = [x_{j1} \quad x_{j2} \quad \dots \quad x_{jN}]^T$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} N & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 \\ \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{1i}^2 x_{2i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i}^3 & \sum x_{1i}^2 x_{2i} & \sum x_{1i}^3 x_{2i} \\ \sum x_{2i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i}^2 & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}^3 & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{1i}^2 x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 x_{2i} & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{1i} x_{2i}^2 & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}^3 \\ \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}^3 x_{2i} & \sum x_{1i}^2 x_{2i} & \sum x_{1i}^2 x_{2i}^2 & \sum x_{1i}^3 & \sum x_{2i}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{1i} x_{2i} \\ \sum y_i x_{2i} \\ \sum y_i x_{1i}^2 \\ \sum y_i x_{1i}^3 \\ \sum y_i x_{1i}^4 \end{bmatrix}$$

SSE regresija:

- regresori:

$$\mathbf{x}_i = [x_{i1} \quad x_{i2} \quad \dots \quad x_{iN}]^T$$

$$\mathbf{x}_j = [x_{j1} \quad x_{j2} \quad \dots \quad x_{jN}]^T$$

- na izlazu bloka želimo:

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N]^T$$

$$SSE = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2$$

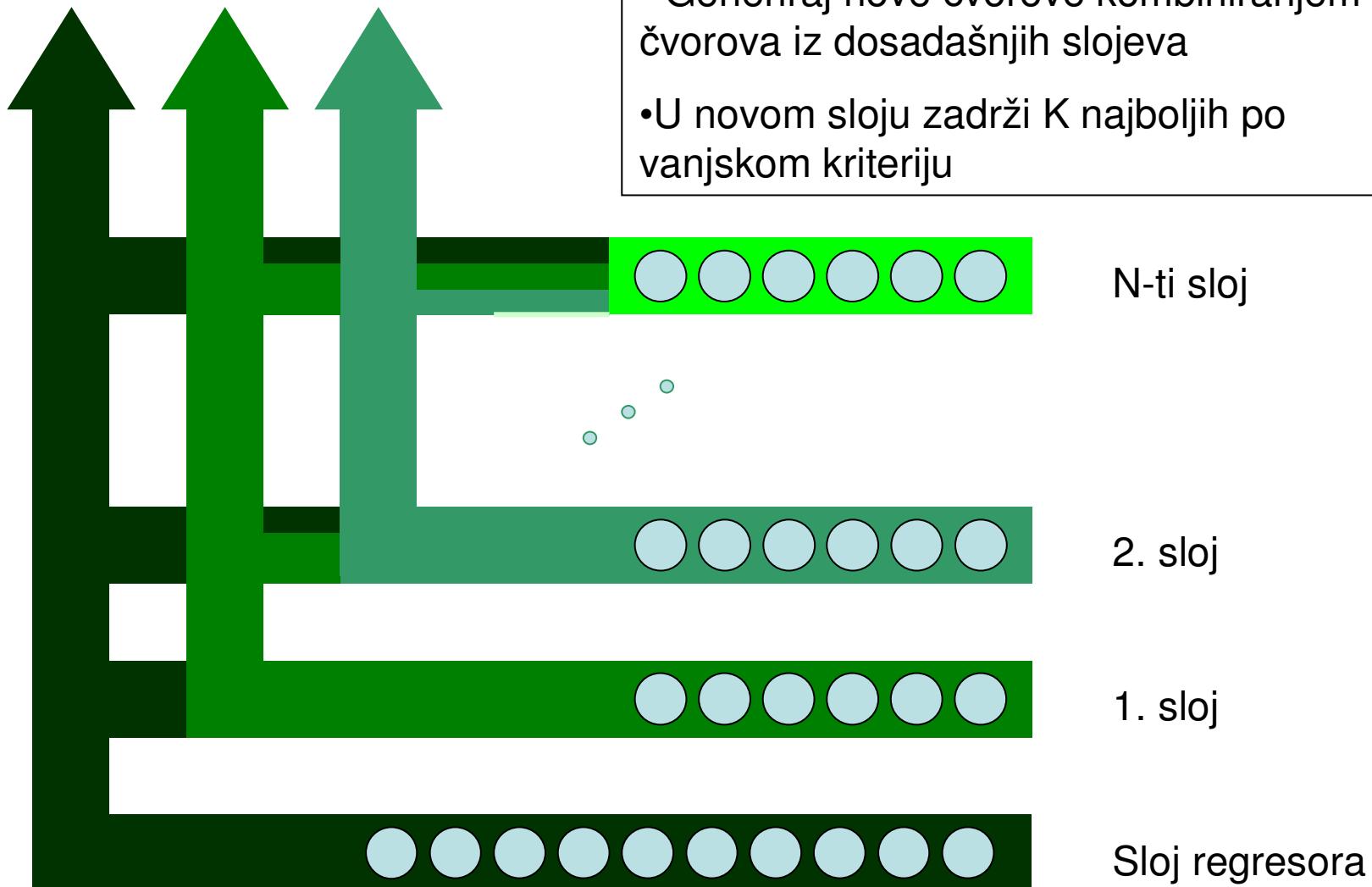
$$dSSE = 0$$

nepoznanice



$$\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{1i} x_{2i} \\ \sum y_i x_{2i} \\ \sum y_i x_{1i}^2 \\ \sum y_i x_{1i}^3 \\ \sum y_i x_{1i}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

COMBI algoritam za učenje



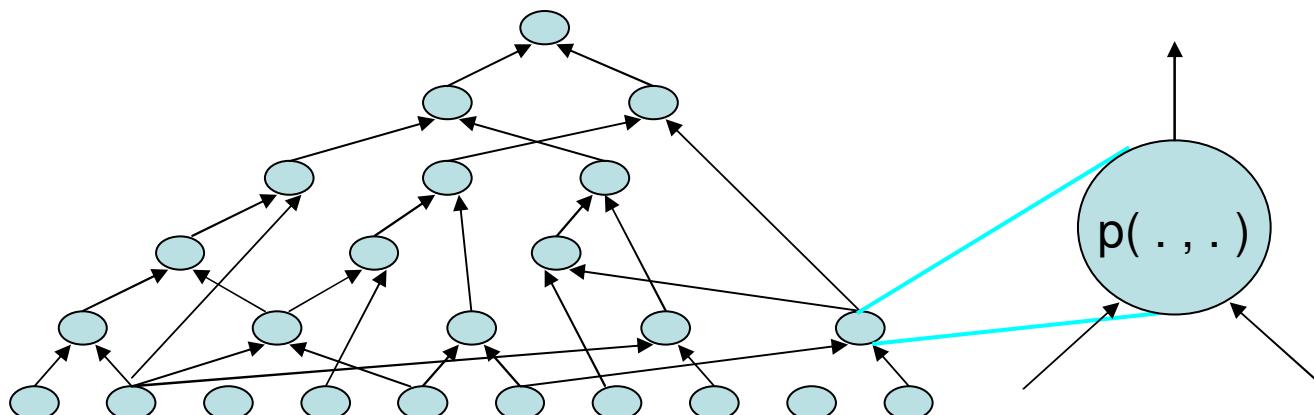
Vanjski kriteriji pogreške

Funkcija:

- Zadržavaju samo najuspješnije čvorove
- Sprečavaju *overfitting*

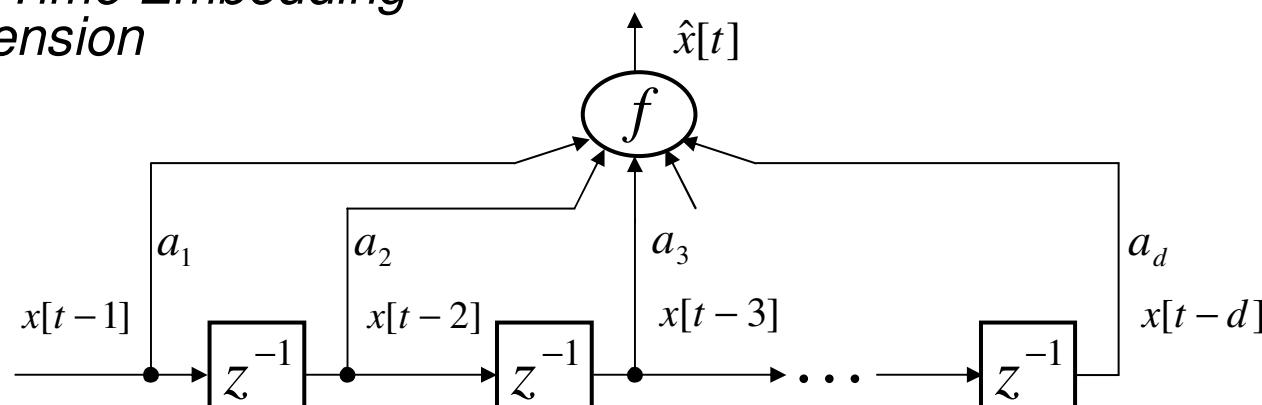
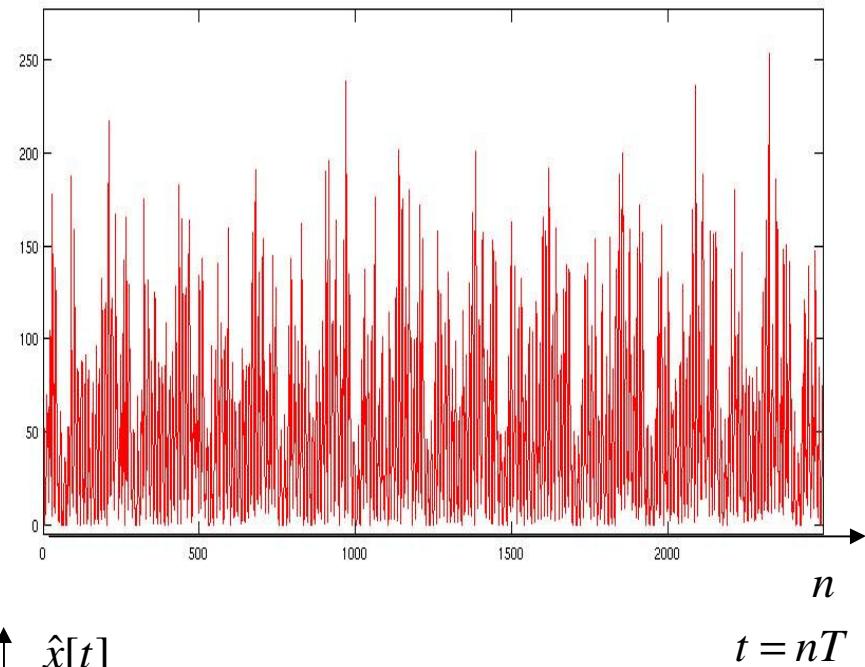
1. Evaluirani na test-setu
 - Npr. SSE
2. Evaluirani na setu za treniranje
 - Npr. Predicted Squared Error
 - Informatički kriteriji

Tipična struktura GMDH



Vremenske serije (1)

- 2-D diskretni signal
- *Time embedding*
 - prognozu budućnosti gradimo na temelju saznanja o prošlosti (vremenska domena)
 - prošlost serije ograničavamo na d uzoraka
 - $d \dots$ *Time Embedding dimension*



Vremenske serije (2)

- Stohastičko modeliranje
 - kad model sa prostorima stanja nije praktičan
 - npr. velik broj stanja
 - AR, ARMA modeli
- Kaotični atraktor kao uzrok vremenske serije
 - niskodimenzionalni prostor stanja sa karakteristikama kaosa
 - kratkoročna predikcija
 - često neutemeljeno; rezultati su jedino opravdanje

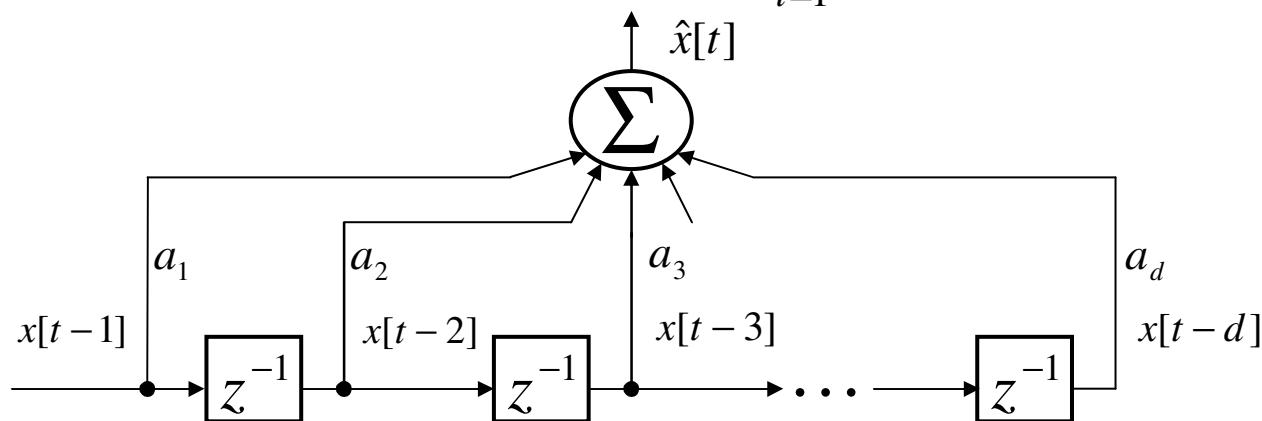
AR (*Autoregressive*) model

$$x[t] = \sum_{i=1}^d \alpha_i x[t-i] + \varepsilon[t]$$

Prepostavka: $\varepsilon[t]$ nepoznat, ali malen

$$\varepsilon[t] \ll x[t]$$

$$\hat{x}[t] \approx x[t] - \varepsilon[t] = \sum_{i=1}^d a_i x[t-i]$$

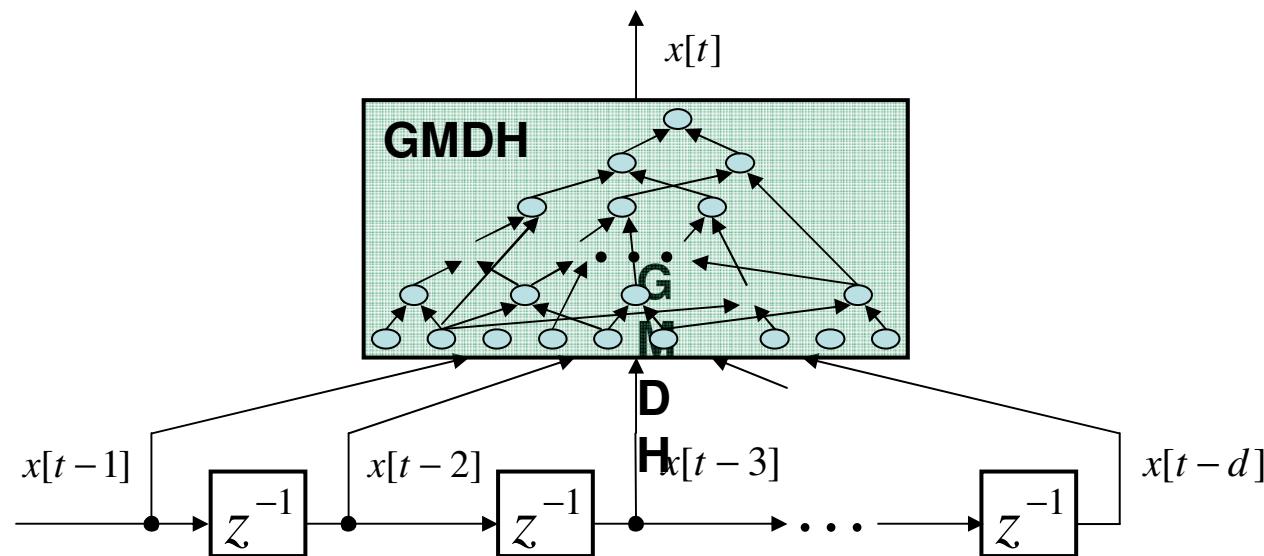


Nelinearni AR model

Generalizacija linearog AR:

$$x[t] = f(x[t-1], x[t-2], \dots, x[t-d])$$

- Nelinearnost $f()$ modeliramo GMDH mrežom



MA (*Moving Average*) model

$$x[t] = \sum_{i=1}^e \beta_i \varepsilon[t - i]$$

Nije praktičan:

- $\varepsilon[t]$ je u potpunosti nepoznat
- model je neovisan o prošlosti serije

ARMA (*Autoregressive Moving Average*) model (1)

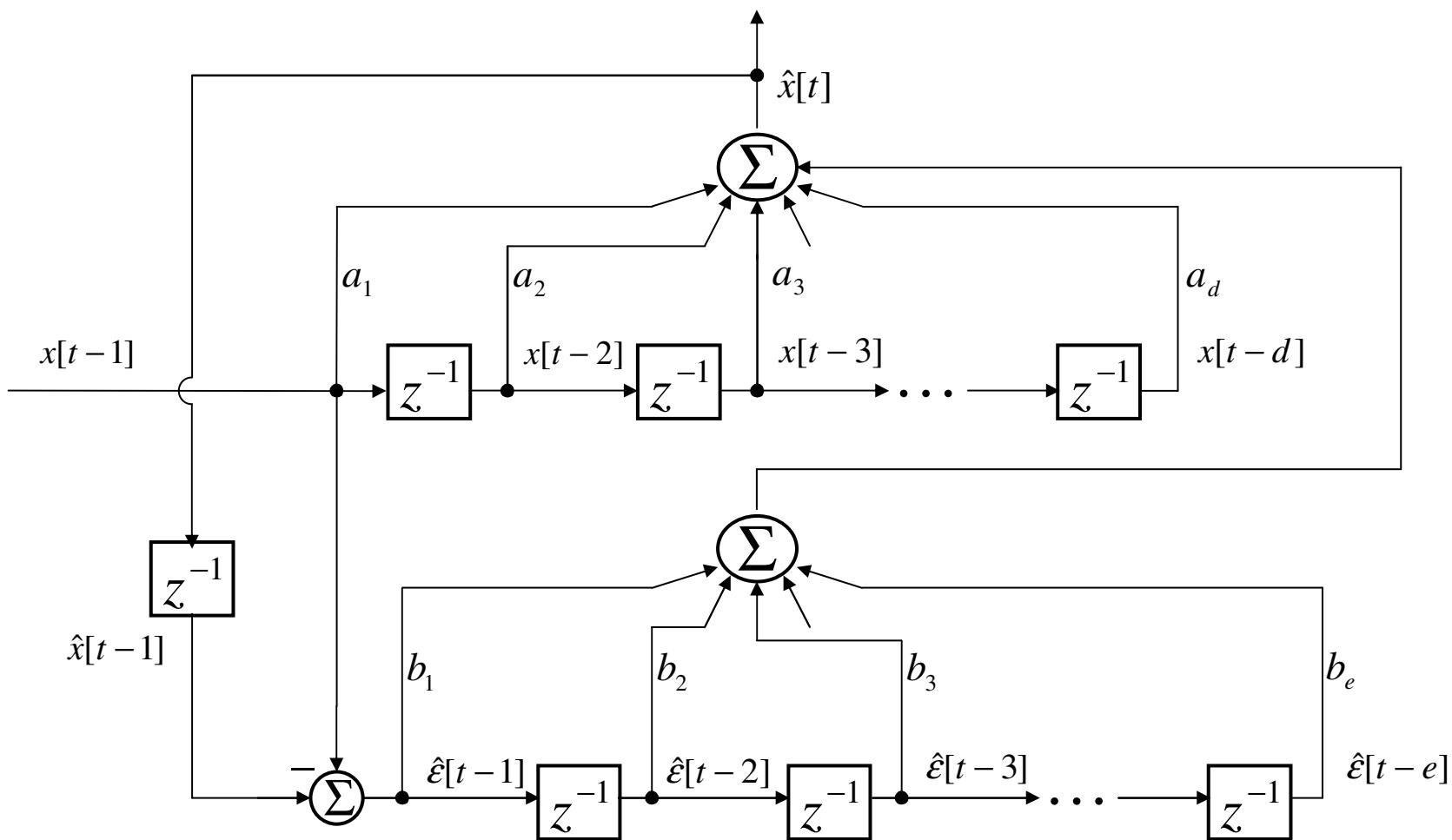
$$x[t] = \sum_{i=1}^d \alpha_i x[t-i] + \sum_{i=1}^e \beta_i \varepsilon[t-i] + \varepsilon[t]$$

Prepostavka:

$$\begin{aligned}\varepsilon[t] &<< x[t] \\ \Rightarrow \hat{x}[t-i] &\approx x[t-i] - \hat{\varepsilon}[t-i]\end{aligned}$$

$$\hat{x}[t] = \sum_{i=1}^d a_i x[t-i] + \sum_{i=1}^e b_i \hat{\varepsilon}[t-i]$$

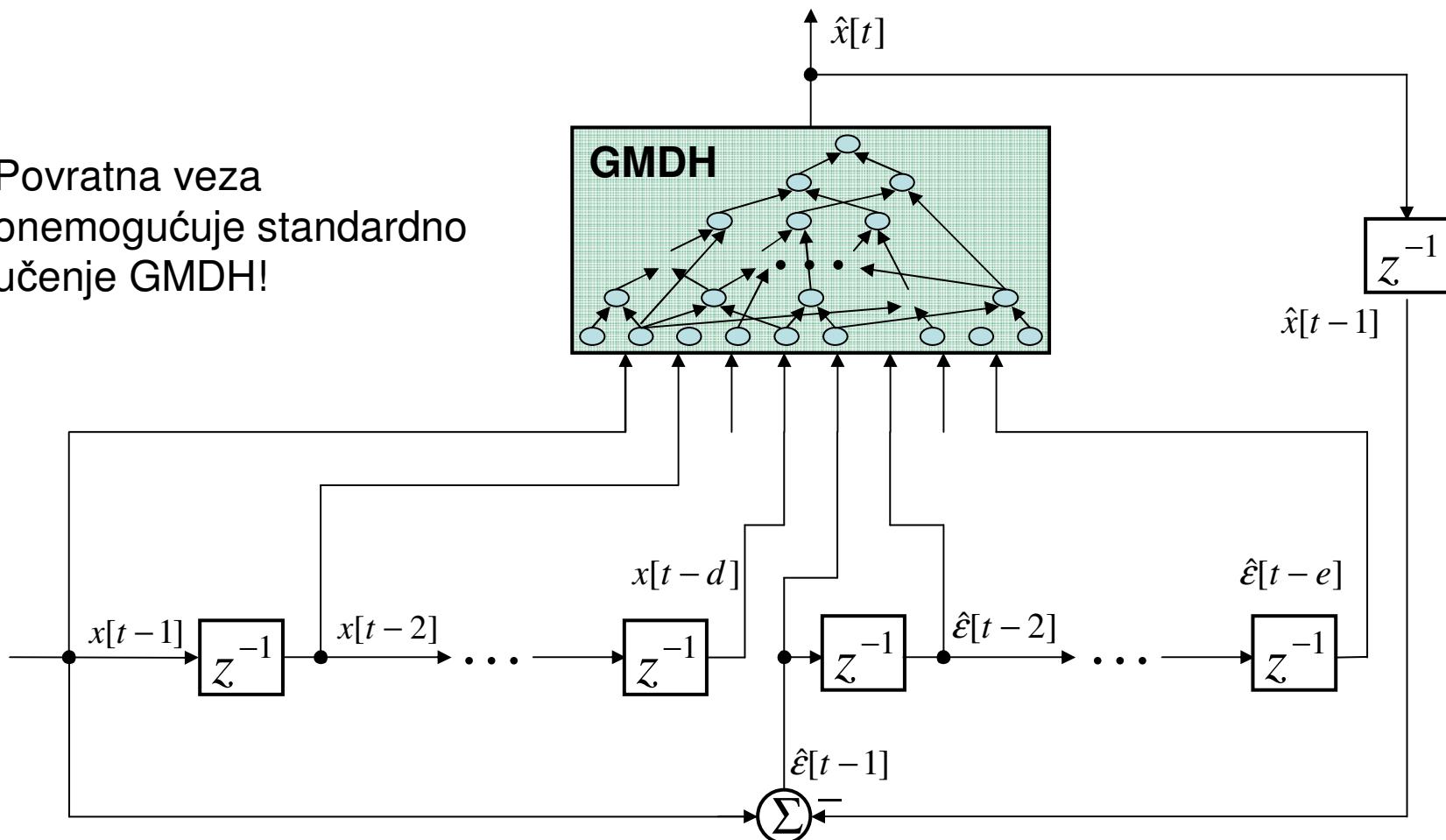
ARMA (*Autoregressive Moving Average*) model (2)



Nelinearni ARMA model (1)

- Nelinearnost želimo opisati GMDH mrežom

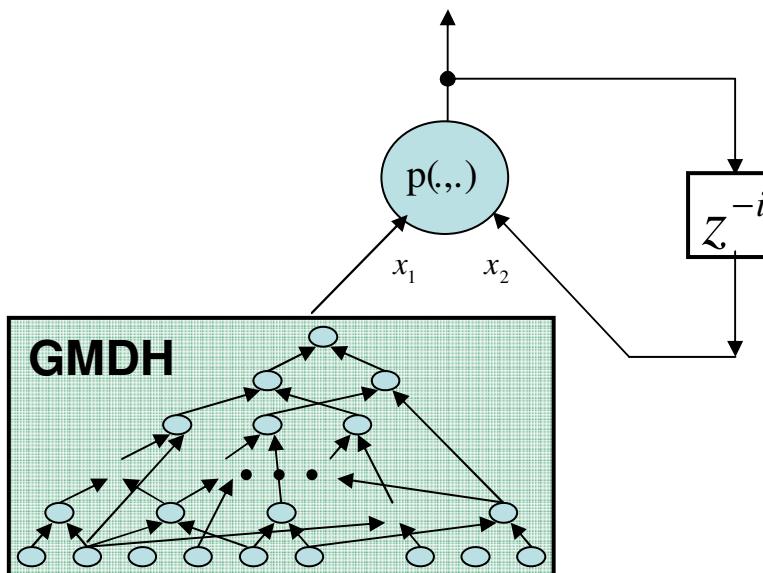
Povratna veza
onemogućuje standardno
učenje GMDH!



Nelinearni ARMA model (2)

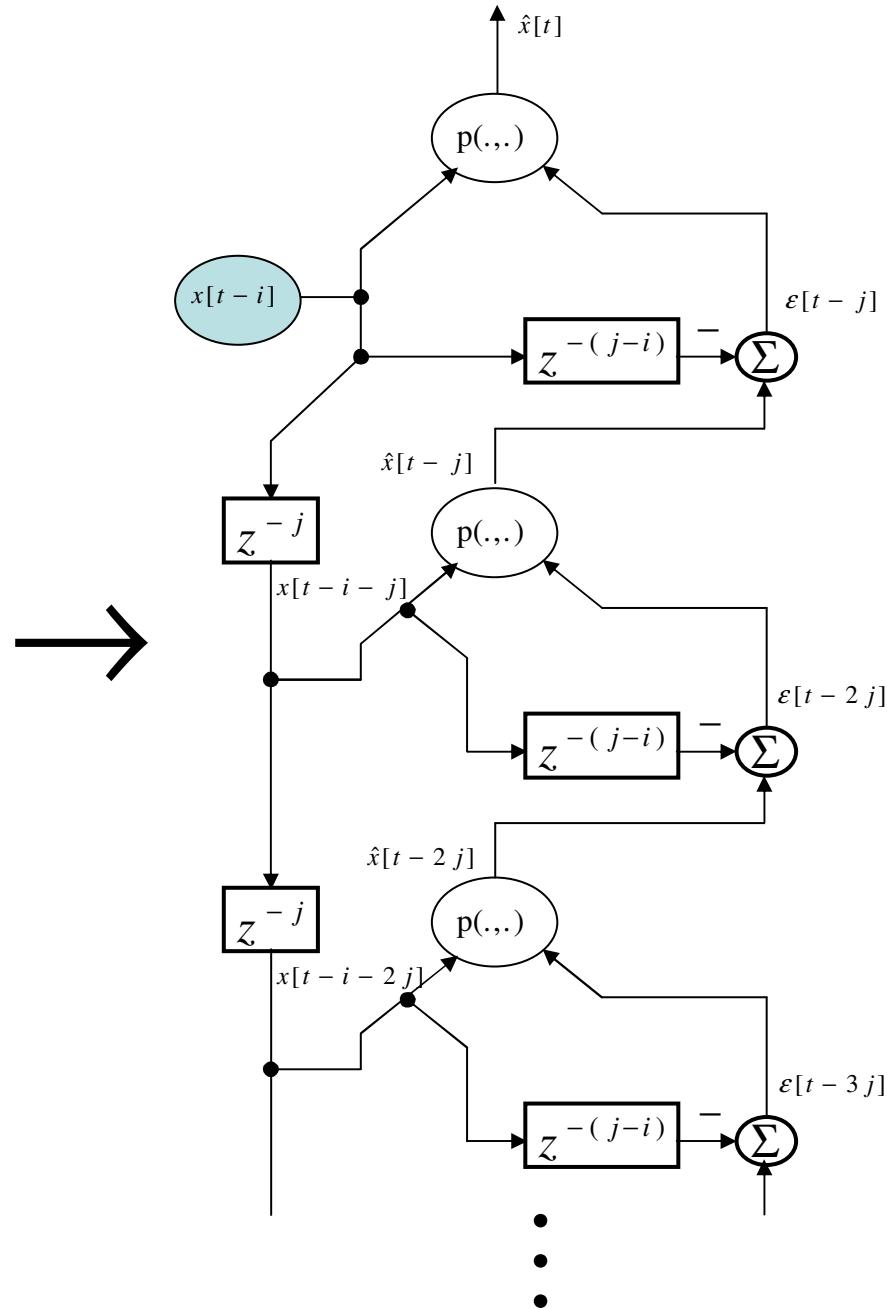
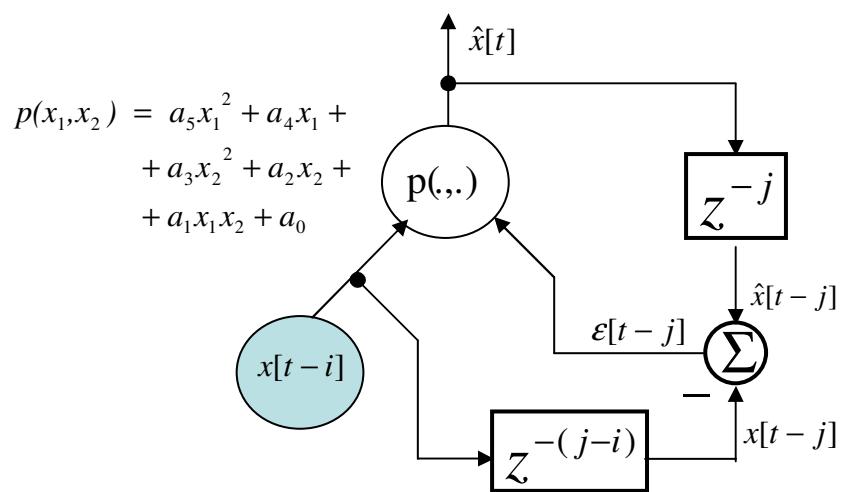
Moguća alternativa za učenje: *Backpropagation Through Time* (BPTT)

- gubimo samoorganizaciju strukture i selektivnost ulaza
- Prijedlog: lokalno rekurzivni primitiv kao GMDH čvor:



- BPTT učenje
- adaptivna struktura mreže međusobnim povezivanjem primitiva

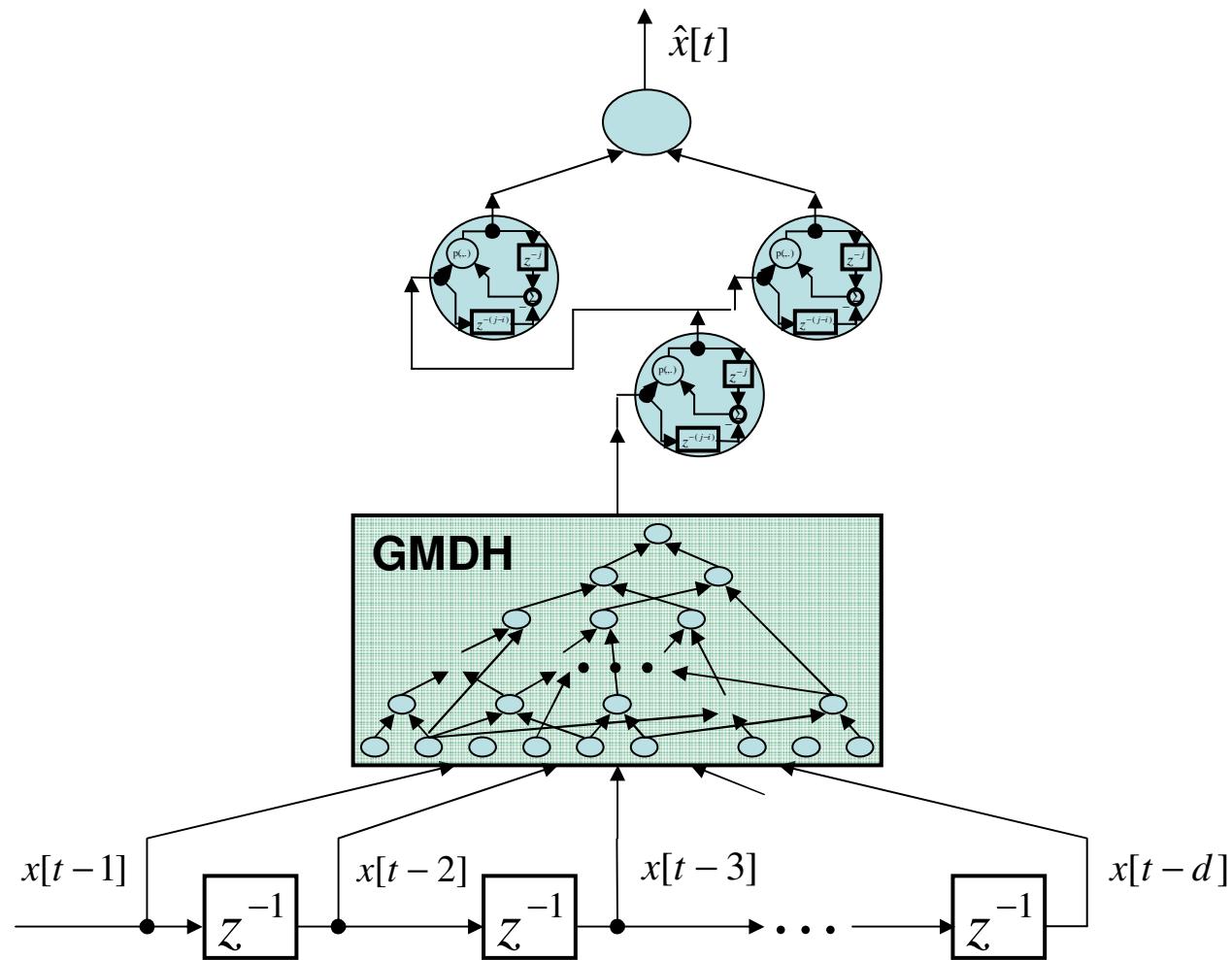
Lokalni ARMA polinomski primitiv



BPTT:

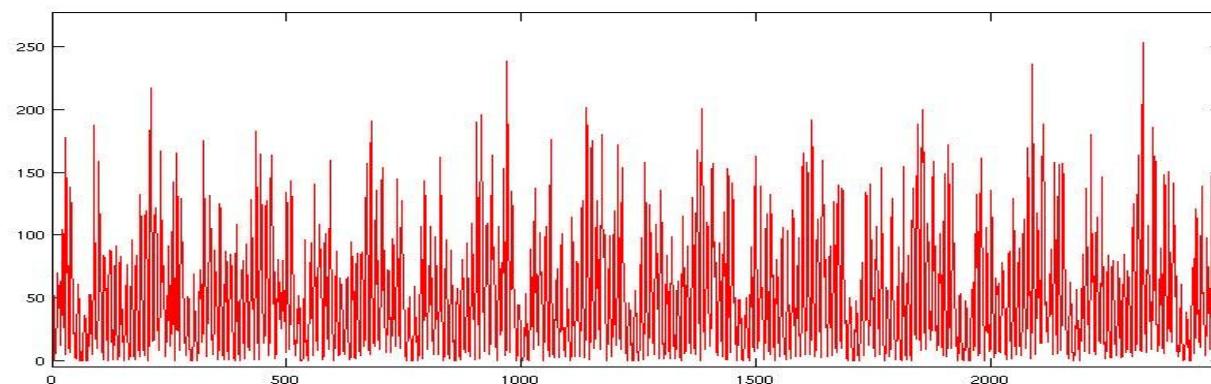
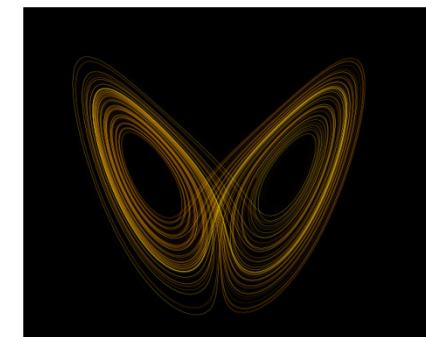
- rasprostrijeti je u ekvivalentnu *feedforward* mrežu koja se zatim trenira backpropagation algoritmom

NARMA-slična GMDH struktura



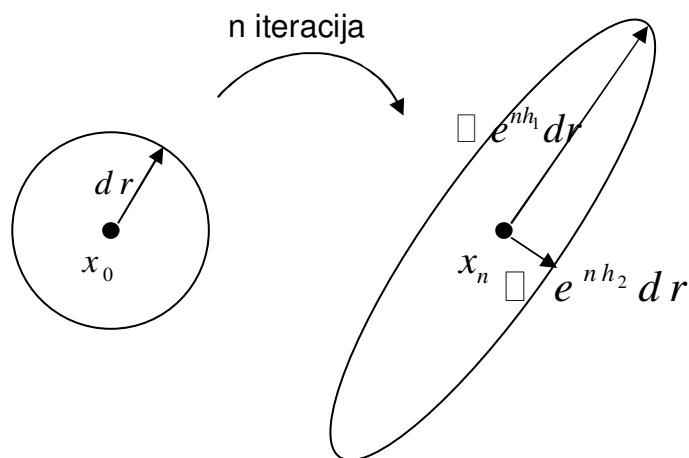
Rekonstrukcija kaotičnih atraktora

- Lyapunovljevi eksponenti
 - Necjelobrojna dimenzija
 - *Time-delay embedding theorem*
 - Metode za kratkoročnu predikciju
-
- Na primjeru:
 - Zuerich monthly sunspot numbers 1749-1983



Lyapunovljevi eksponenti

Box-counting dimension



- 2D atraktor
- $H_1 \dots$ najveći Lyapunovljev eksponent

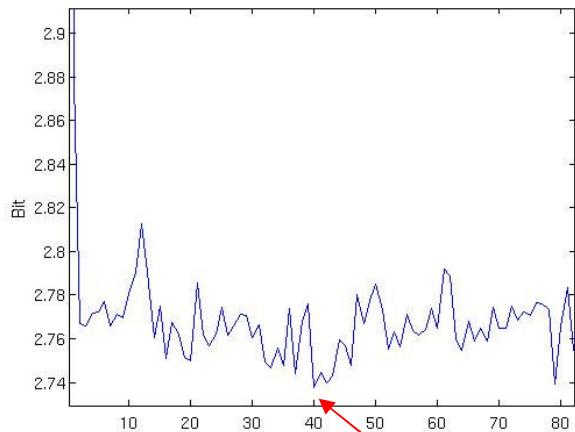
k - dimenzionalni atraktor
prekrivamo k-dimenzionalnim kockama sa stranicama \mathcal{E}

Granični slučaj:

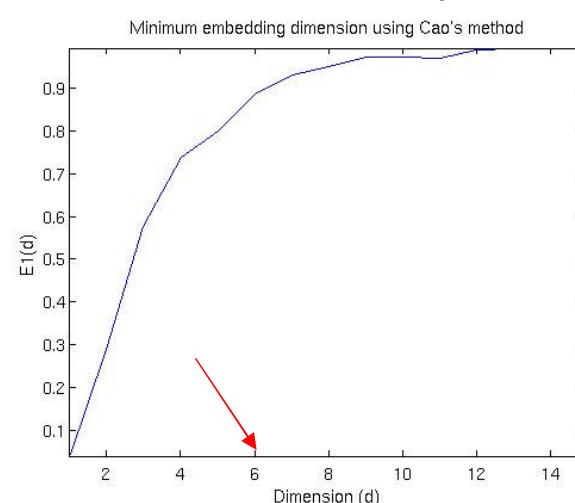
$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon^{-1})}$$

Takensov teorem

- *Time-delay embedding*
- Uz pretpostavku da je dinamika iza vremenske serije kaotični atraktor sa *box-counting* dimenzijom d , atraktor se može rekonstruirati u k -dimenzionalnom Euklidskom prostoru uz $k > d$
- Preostaje odabir
 - kašnjenja
 - dimenzije



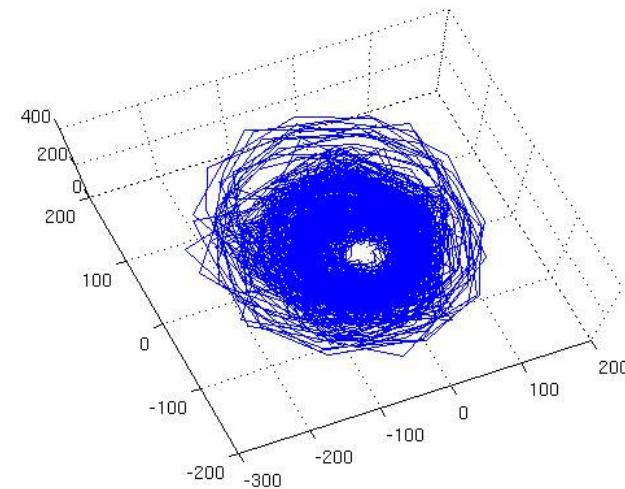
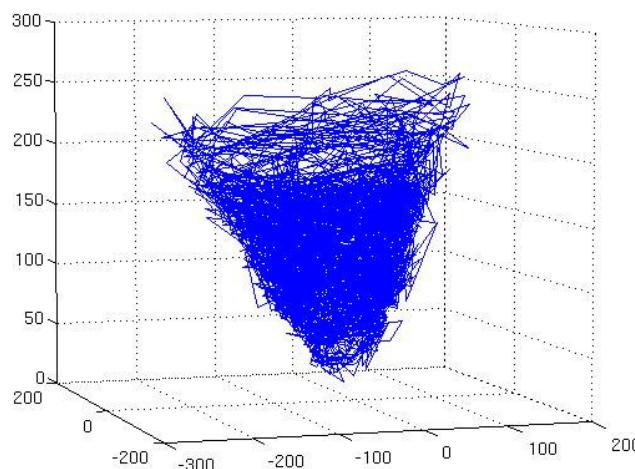
Minimum mjere zajedničke informacije između uzorka i zakašnjelog uzorka



Cova metoda

Rekonstruirani atraktor

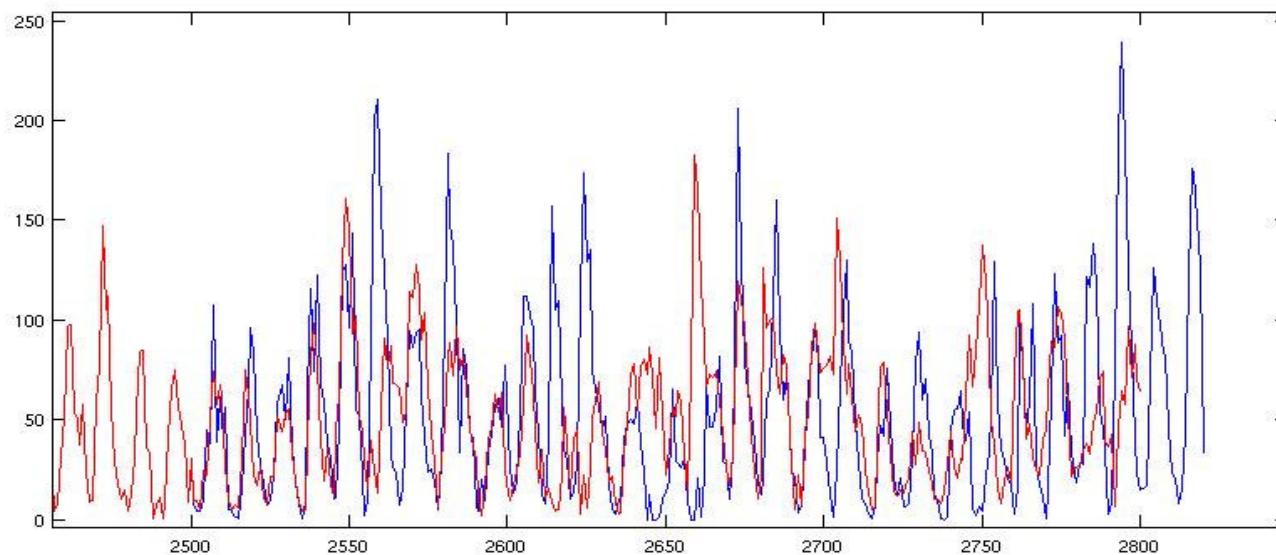
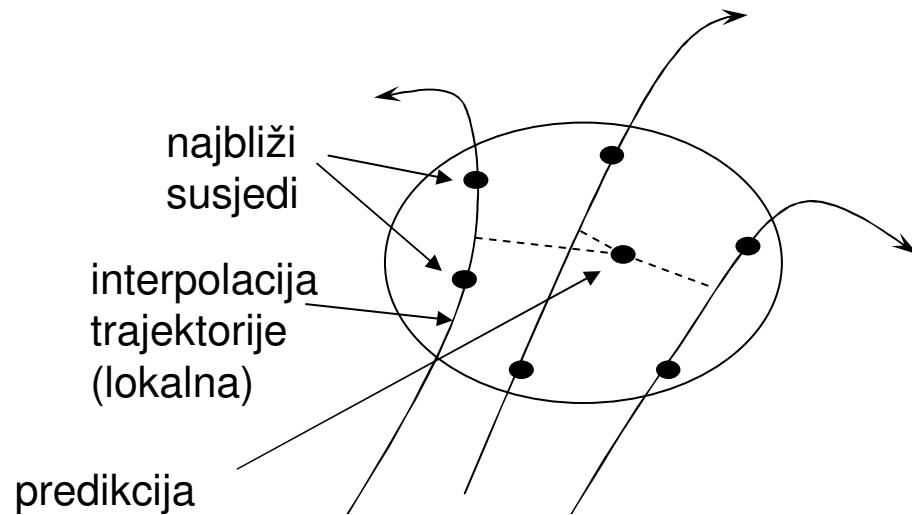
- *Embedding dimension: 6*
- *Delay: 40*



(projekcija rekonstrukcije na prve 3 principalne komponente)

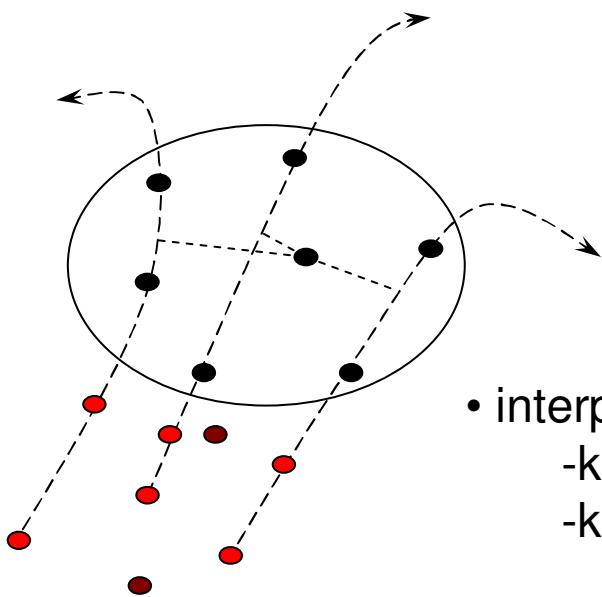
Predikcija trajektorije

- Kratkoročna



- Linearna interpolacija
- 6 najbližih susjeda

Moguća GMDH interpolacija



- bez interpolacije susjednih trajektorija
- interpolacija na temelju:
 - kratke prošlosti trajektorije koju predviđamo
 - kratke prošlosti susjednih trajektorija
- Svaki uzorak u k-dimenzionalnom prostoru stanja “potrošit” će k ulaza u GMDH mrežu
- Mreža će imati k-izlaza (ekvivalentno, trenira se k mreža minimizacijom ukupne zajedničke sume kvadrata pogreške)